数理解析研究所講究録
993巻 1997年 98-109

ファラデー水面波〜カオス・ソリトン・パターン形成〜

東大理　　梅木　誠

1 はじめに

鉛直に振動を加えた板の上の流体の表面に現れる波のパターンの研究は、1831年のファラデーの実験 [21] に遡る。ファラデーの論文は、中央を固定した板の一辺をバイオリンの弓で振動させ、その上に置いたいろいろな粉体の創るパターン (Chladni の図[1]) を観察したものであるが、その Appendix (といっても、約半分のページを占める) に、粉体を流体に置き換えた場合について記されている。これらの現象では、板自体の振動が重要であるが、板が変形せず、一様に上下に振動する場合でも、自発的にパターンが現れる。

容器の一様な上下振動による流体の表面波の励起の現象（ファラデー水面波と呼ぶことにする）において、この十数年で、実験と理論の両面から低自由度のモード競合によるカオスや、浮遊粒子の異常拡散、孤立波の励起、水面波モードの時空変調などが調べられてきた。また、最近5年ほどで、水面波の波長が容器のサイズに比べ十分小さいときに、どのようなパターン（直線、正方形、菱形、六角形、三角形、準周期など）が選択されるかを調べる実験が、種々の条件下で行われている。タイトルが示すように、ファラデー水面波は、カオス、ソリトン及びパターン形成の各分野を横断する現象である。

すでに、低次元系の理論に関するレビュー [41] も存在するが、本論文では、これらの近年の実験的成果をレビューし、流体力学の理論と非線形物理の手法を駆使した解析を紹介する。特にパターン形成についての最近の文献を網羅し、この分野の最新の研究を概観したい。

2 ファラデー水面波におけるカオス

ファラデー水面波のカオス的現象として、モード競合による低次元カオス、ホモクリニックカオス、3次元定在水面波によるラグランジュ乱流、水面波モードの変調による時空カオスがあげられる。これらの現象を理論的定式化から解説する。

2.1 水面波のラグランジアン定式化

密度ρの非粘性非圧縮渦なし流による水面波の運動は、力学の第一原理であるラグランジュ定式化により記述する事ができる。速度ポテンシャル $\phi(t,x,y,z)$ と表面変位 $\eta(t,x,y)$ はそれ

[1]振動する板の上の粉体のつくるパターンについては1787年の Chladni[9] の研究に起源する。この歴史的背景については、Rossing[47] に記されている。

ぞれ

$$\phi(t,x,y,z) = \sum_i \phi_i(t)\psi_i(x,y)H_i(z), \qquad H_i(z) = \mathrm{sech}\kappa_i d \cosh\kappa_i(z+d) \tag{1}$$

$$\eta(t,x,y) = \sum_i \eta_i(t)\psi_i(x,y) \tag{2}$$

と表される。但し、固有モード ψ_i は柱状容器 (断面積 S) の形状に依存するが、パターン形成の問題を扱う場合は境界による制限を弱くし、

$$\psi_i \equiv \psi_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{2}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\theta_0), \qquad |\boldsymbol{k}| = \kappa_i \tag{3}$$

のような (準) 周期的境界条件を満たすものに拡張して考える。

運動学的境界条件の変分原理を用いて、運動エネルギー T と重力、表面張力によるポテンシャルエネルギー V, V_C は、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int_V (\nabla\phi)^2 dV = \frac{1}{2}\rho S a_{mn}\dot{\eta}_m\dot{\eta}_n & (4)\\ V &= -\rho\int_V dV(-g+g_z)z = \frac{1}{2}\rho S(g-g_z)\eta_n^2 & (5)\\ V_C &= \gamma\int_S dS[(1+|\nabla\eta|^2)^{1/2}-1] = \frac{1}{2}\rho S c_{mn}\eta_m\eta_n & (6)\end{aligned}$$

と表される [36]。これよりラグランジアンは、

$$\begin{aligned} \hat{L} &= L/\rho S = (T-V-V_C)/\rho S \\ &= \frac{1}{2}a_n(\dot{\eta}_n^2-\omega_n^2\eta_n^2)+\frac{1}{2}g_z\eta_n^2+\frac{1}{2}\hat{a}_{mn}\dot{\eta}_m\dot{\eta}_n-\frac{1}{2}\hat{c}_{mn}\eta_m\eta_n & (7)\end{aligned}$$

となる。但し、$g_z = 4a_0\cos 2\omega t$ は鉛直加振による加速度であり、

$$\begin{aligned} a_{mn} &= a_n\delta_{mn}+\hat{a}_{mn}, \quad a_n = (\kappa_n\tanh\kappa_n d)^{-1}, & (8)\\ c_{mn} &= \frac{\gamma}{\rho}\kappa_n^2\delta_{mn}+\hat{c}_{mn}, & (9)\\ \omega_n &= [(1+\gamma/\rho g)g/a_n]^{1/2}. & (10)\end{aligned}$$

と表される。ここで $\hat{a}_{mn}, \hat{c}_{mn}$ はη_iの非線形の関数であり、展開により近似的に計算する事ができる。(7) を用いて、水面波の運動はラグランジュの運動方程式で表すことができる。しかし、その系は非自励系であるので、通常平均化の操作を行う。ϵを展開パラメータとして、n 番目のモードの振幅を

$$\begin{aligned} \eta_n(t) &= \epsilon a_i r_{1n}^1 E+\epsilon^2 a_i(r_{2n}^2E^2+r_{0n}^2)+\epsilon^3 a_i(r_{3n}^3E^3+r_{1n}^3E)+O(\epsilon^4)+\mathrm{c.c.} & (11)\\ E &= \mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad r_{1n}^1 = \frac{1}{2}(p_n+iq_n) & (12)\end{aligned}$$

と表し、水面波の周期で時間平均をとると $(\omega \approx \omega_1)$、平均ラグランジアン及び、$\tau = \epsilon^2 \omega t$ の関数である p_i, q_i に対するハミルトニアンが得られる。4 次近似でのハミルトニアン [54] は以下のようになる。

$$H(p_i, q_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\beta_i}{2} r_i^2 + \frac{A_0}{2}(p_i^2 - q_i^2) + \frac{A_i}{4} r_i^4 \right] + \sum_{i>j} \frac{1}{2} \left[C_{ij} r_i^2 r_j^2 + D_{ij} M_{ij}^2 \right] \tag{13}$$

ここで、$r_i^2 = p_i^2 + q_i^2$ であり、$M_{ij} = p_i q_j - p_j q_i$ は定在波 (回転波) の角運動量に関連する量、$A_0 = a_0/(\epsilon^2 a_1)$ は外力、$\beta_i = (1 - \omega_i^2/\omega^2)/(2\epsilon^2)$ は振動数のずれを表す。平均ラグランジュ法で得られる 4 次の係数 [54] は、通常の摂動計算の結果 [23] と完全に一致する。また、(13) の高次近似として、外力の 4 次の非線形性が Miles [38, 39] により考慮されているが、Decent & Craik [13] は 2 次元の水面波で 6 次までの近似を行い、Miles [38] と異なる非線形係数の表式を得ている。

一方、実在の流体は粘性を持つので、実験との比較には散逸を考慮する必要がある。散逸を評価する方法を、一般に自由表面を持ちうる粘性流体におけるエネルギー収支から考察する。運動方程式

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \partial_k v_i - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma'_{ik} + f_i \tag{14}$$

(v_i:速度、p:圧力、σ':粘性応力、$f_i = (-g + g_z)\delta_{iz}$: 体積力) より、各瞬間での全エネルギー $E = T + V + V_C$ の変化率は、

$$\frac{dE}{dt} - \frac{1}{2} \dot{g}_z \rho S \sum_n \eta_n^2 = -\varepsilon \tag{15}$$

である。ここで、ε はエネルギー散逸率

$$\varepsilon = \int_V dV \sigma'_{ik} \partial_k v_i \tag{16}$$

を表す。(15) の時間平均 ($< \cdot >$ で表す) をとることで非線形効果まで含めたエネルギーの散逸を評価する事ができる。一般に、

$$< \frac{d}{dt} E > \neq \frac{d}{dt} < E > \tag{17}$$

であるので、これまでの減衰の非線形効果を、$d < E > /dt$ を用いて計算した研究 [42, 38, 39] は修正が必要であると思われる。

さらには、非粘性の解析に減衰を後から加える手法でなく、初めから粘性項を入れた解析 [6, 28] もなされている。また、波の発生に対する実験と、[28] との比較 [5] も行われている。

2.2 低次元カオス

水面波の波長が容器サイズにくらべて、同じあるいは数分の 1 程度である場合、共鳴条件を満たすモードが少数であるため、単一共鳴モードの励起や、2 個のモードの競合がおきる。後者

ではそれが周期的であったり、カオスとなりうる。前節のハミルトン系に散逸を入れた力学系

$$\frac{d}{d\tau}(p_i, q_i) = \left(-\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial p_i}\right) H - \left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial q_i}\right) D \tag{18}$$

が、2モード散逸系カオスの実験 [12, 50] をよく説明している [59, 27, 54]。

また、(18) は散逸と外力のない場合には可積分であり、ホモクリニック解を持ちうることから、外力の入った場合にはホモクリニックカオスを生じる [54]。但し、実験では散逸の効果が大きく、観測される運動はアトラクターと考えられ、またメルニコフの方法を用いる際の仮定が破れているため、このホモクリニックカオスは実験に直接対応するものではないと考えるべきであろう。

2.3 3次元定在波によるラグランジュ乱流

ファラデー共鳴によって励起された水面波の上に粒子を浮かべて、その運動を観察する実験 [45, 51, 1, 49] がなされた。いずれも、異常拡散（または分数的ブラウン運動）と呼ばれる、

$$< [X(t') - X(t')]^2 > \propto |t' - t|^{2H}, \qquad 0 < H < 1 \tag{19}$$

(Xは表面上の粒子の位置) という振る舞いを示している。一方、2次元進行波による流体粒子の運動は、ストークス・ドリフトとして知られていたが、3次元定在波に関しては、Umeki[55, 57, 60] が角運動量による粒子輸送を理論的に示した。これは、縮退した2つ (以上) のモードが時間的位相差をもって励起されたときに、流体粒子がドリフト運動をするというものであり、2次元のストークス・ドリフトの拡張になっている。さらに、Umeki [55, 57, 60] は定在水面波が変調を受けない場合でも、振幅が大きくなったときに、表面上の粒子運動がカオス的になることを、表面流の2次までの近似の系で示した。このようなラグランジュ乱流の系では、他の例でも異常拡散の現象が確認されており、実験で観測された異常拡散は、変調を受けないラグランジュ乱流と水面波の変調の、2つの効果に依ると思われる。なお、ファラデー水面波による粒子運動と異常拡散のその他の理論的説明として、ストークス・ドリフトの揺らぎによるモデル [35] やの写像モデル [3, 2] が提案されている。

また、粒子の代わりに蛍光物質を浮かべてパッシブスカラーの拡散を測定し、マルチフラクタルの性質を調べた研究 [46] もある。

3 ファラデー水面波におけるソリトン

細長い容器内のファラデー水面波による定在ソリトンは、1984年に Wu et al. [61] により実験的に発見された。1つの安定な孤立波が現れたり、ソリトン振動と呼ばれる2つの定在波の衝突とすり抜けを繰り返す現象が観察された。Miles [37] は、このソリトンは、短辺に1つ節のあるモードの長辺方向への変調により記述できるとして、非線形シュレディンガー方程式

に複素共役型の外力と減衰の加わった方程式 (パラメトリック散逸非線形シュレディンガー方程式)

$$i(r_\tau + \alpha r) + Br_{xx} + (\beta + A|r|^2)r + A_0 r^* = 0, \qquad A > 0, B > 0 \tag{20}$$

を導いた[2]。

この方程式は、sech 型の定常孤立波解 (ブリーザー解) や Jacobi の楕円関数で表される定常空間周期解 [37, 56] を持つ。Umeki [56] は周期境界条件で (20) の安定性解析と数値計算を行い、クノイダル波のホップ分岐による周期運動、さらに時空カオス状態が存在することを示した。sech 型の孤立波の安定性解析 [4, 29, 25] によっても同様の不安定性が起きることが示されている。

ファラデー水面波の孤立波に対して、ソリトン理論を用いた解析もなされている。Chen & Wei [8] は、1 ソリトンに対し逆散乱摂動法を用いた。(20) を

$$iu_\tau + (\beta + A_0 \cos 2\delta)u + u_{xx} + 2|u|^2 u = iR(u), \quad R(u) = -(\alpha + A_0 \sin 2\delta)u \tag{21}$$

と書き換え、1 ソリトン

$$u = u_s = 2\rho e^{i\phi} \mathrm{sech} Z \tag{22}$$

$$Z = 2\rho(x - \xi), \qquad \phi = \frac{\sigma}{\rho} Z + \delta \tag{23}$$

の位置ξ、振幅または幅の逆数ρ及び位相のパラメータσ, δが以下のような微分方程式で記述されることを示した。

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -2(\alpha + A_0 \sin 2\delta)\rho, \qquad \frac{d\delta}{d\tau} = -\beta - A_0 \cos 2\delta - 4\rho^2 \tag{24}$$

$$\sigma = 0, \qquad \frac{d\xi}{d\tau} = 0. \tag{25}$$

これは、([8] には明らかでないが、) ρとδを正準変数とし、

$$H(\rho, \delta) = -A_0 \rho \cos 2\delta - \beta\rho - \frac{4}{3}\rho^3 \tag{26}$$

をハミルトニアンとし、さらに線形減衰を加えた系

$$\frac{d\delta}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \rho}, \qquad \frac{d\rho}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \delta} - 2\alpha\rho \tag{27}$$

であり、非線形の次数が異なっているが外力の形は一致しているという意味で、ファラデー水面波の低次元系に類似している。1 ソリトンの解析では Wu et al.[61] のソリトン振動の現象を説明できないが、Chen & Wei [8] は、外力が時間的変調を受ける場合でカオスを含む運動を数値的に調べ、実験と比較している。

[2] Larraza & Putterman [30] も同様の解析を行ったが、彼らの導いた方程式には外力と散逸項が含まれていない。

一方、外力や散逸のない非線形シュレディンガー方程式の場合と同様、$A<0$ の場合にはキンクが存在することが実験的 [14] 及び理論的 [26] に示されている。

なお、周期境界を含む有限領域での定在波を考える場合、積分型の補正項が必要であることが Sasaki [48] によって示されている [40]。但し、その補正項の係数は $(1-\tanh^2\kappa d)^2$ に比例するので、その効果は浅水波の場合に顕著であると考えられる。Wu et al.[61] の実験は深水波であり、この係数は非常に小さい。

4　ファラデー水面波におけるパターン形成

ファラデー水面波のパターン形成の問題は、規則パターンの選択とそのパターンの時空変調の現象に分けられる。実験的には近年多くの研究がなされているが、低次元カオスの解析に比べ、理論的には解決されていない点が多い。

4.1　パターン選択

2 次元 (またはそれ以上) の系において、境界のサイズが系の代表的スケールより十分大きい場合、励起されうるモードは多くなり、そのなかでどの空間的パターンが選択されるかは興味深い問題である。狭義には、境界の形に左右されず、あるいは境界間の距離を無限遠にしたとき現れる形状を、パターン選択の問題と考える。特に系が等方的である場合は、線形理論では決まらない励起されるモードの数や波数ベクトルの向きが、自発的に選択される。流体力学では熱対流がこのような問題の典型であるが、ファラデー水面波においても、現れるパターンが実験的に調べられてきた。その結果を要約すると、粘性の小さな流体 (水やアルコール) の表面張力波では正方形パターン [18, 19, 20, 52] であり、粘性の大きな流体 (グリセリン) では直線パターン [17] が現れる[3]。さらに、300–400Hz の高振動数では、表面張力波で不規則パターンから六角形、準周期パターンへの遷移が観察されている [10, 11]。また、臨界温度近傍の二酸化炭素の気相・液相界面で、臨界点に近づくにつれて、正方形から直線へパターンの遷移が起きること [22] や、2 つの周波数成分を持つ外力で準周期パターンが現れうること [16, 17] がわかっている。

一方、このようなパターン選択の現象に対する有力かつシンプルな理論の一つに、以下のような理論 [32, 44] がある。まず、現象を記述する系が常微分方程式系で書け、中心多様体近似により、それが次のような勾配系に近似できるとする。

$$\dot{s_i} = -\frac{\partial F}{\partial s_i}, \quad i = 0, \cdots N-1, \tag{28}$$

ここで、s_iはモードの振幅、Nは考えるモードの数で、$N \gg 1$ であり、$F(s_i)$ はリアプノフ関数 (またはポテンシャル) と呼ばれる。(一般に s_iは複素数であるが、簡単のため、ここでは実

[3] 粘性の大きな流体で六角形パターンが現れたという実験 [15] もあるが、これは波長と容器サイズの比が 10 程度であり、狭義のパターン選択ではないと思われる。

数とする。）Fは時間の非増加関数 ($\dot{F} = -(\partial F/\partial s_i)^2 \leq 0$) であるので、$F$ の極小値を与えるパターンが選択される。さらに、Fが

$$F = -\frac{1}{2}\sum_i \mu s_i^2 + \frac{1}{4}\sum_{i,j} C_{ij} s_i^2 s_j^2 \tag{29}$$

と表され、その非線形項が3次でなく4次である場合を考える。但し、$C_{ij} = C(\theta)$ であり、θ は $\boldsymbol{k}_i$ と $\boldsymbol{k}_j$ のなす角を表す。非線形相互作用の係数Cは、一般には

$$C(\theta) = C(\pi - \theta) = C(-\theta), \qquad \lim_{\theta \to 0} C(\theta) = 2C(0) \tag{30}$$

という性質を持ち、$\theta = 0$ で $C(\theta)$ は不連続である。

ところで、大きなNに対してFの極値をすべて見いだし分類するのは容易でない。しかし、対称な定常解については分類が可能である。N個のモードのうち、等間隔に分布するM個のモードが同じ0でない値を持つとき (対称Mモードと呼ぶ)、その解は、

$$s_j^2 = \frac{\mu}{M < C(\theta) >}, \qquad j = 0, \frac{N}{M}, \cdots \frac{N(M-1)}{M} \tag{31}$$

と表される。但し、$< C(\theta) >= \sum_{j=0}^{M-1} C(\pi j/M)/M$ は非線形係数の角度での平均である。$M = 1$ のときは、1モード、即ち直線パターンを表し、$M = 2, 3$ は正方形、六角形パターン[4]に対応し、$M = 4$ 以上は準周期パターンである。

対称 M モードに対し、$F = -\mu^2/(4 < C(\theta) >)$ であるので、$< C(\theta) >$ を最小にするパターンがFを最小にし、選択される。リアプノフ関数の物理的意味はこの議論からは不明であるが、一般の系では、F は輸送現象に関係する物理量であることが多い。この理論の長所は非線形相互作用の係数の角度依存性を見るだけで選択されるパターンを予想できることである。

ファラデー水面波は減衰を受けるハミルトン系であるので、一見この理論は適用できないように思えるが、中心多様体による自由度の逓減を行い、勾配系に変換することができる [58]。その結果、リアプノフ関数は

$$F = -\frac{1}{2}(\hat{\mu} - \alpha)\sum_i s_i^2 + \frac{1}{4}\sum_{i,j} \frac{\beta}{\hat{\mu}} C_{ij} s_i^2 s_j^2 \tag{32}$$

で与えられる。ここで、$\hat{\mu} = \sqrt{A_0^2 - \beta^2}$ である。C_{ij}は (13) のものと同一であり、D_{ij}は現れない。有限深さの表面張力重力波の4次近似で導かれた $C(\theta)$ の関数形からは、表面張力波では正方形、重力波では直線、中間の表面張力重力波では六角形や準周期パターンが選択されることが、上の理論を用いて示される。 これは、表面張力波については非線形減衰を取り入れた Milner [42] の結果と一致している。今後、減衰及び外力の高次項を正確に評価し、これらの結果がどのように補正されるかが興味深い[5]。

[4]正確には、$M = 3$ では各モード (3) の位相θ_0の値によって、パターンは六角形から三角形に変化する [43]。

[5]Zhang & Viñals[62] は、準ポテンシャル近似と呼ぶ手法で表面での速度ポテンシャルと変位の空間2次元の方程式系を導き、リアプノフ関数による解析を行っている。

4.2　2次元パターンの時空変調

選択された2次元パターンは、外力が大きくなるに従い、時間的にも空間的にも変調を起こすことが、実験で観測されている [18, 19, 20, 52]。変調を受けたファラデー水面波の光学データより、空間スペクトルのモードの揺らぎが間欠的であるという実験結果 [7] も報告されている。2次元的な変調の問題は、1次元の解析を拡張すればよいと考えられるが、理論解析、数値計算ともに今後の課題である。

粉体の鉛直加振による表面波でも、流体同様種々のパターンが観測されている [33, 34] が、特に最近2次元的な孤立波が励起されることが、詳細なパラメータ依存性とともに報告されている [53]。このような2次元的な孤立波は通常の流体では観測されていないが、類似の現象が粘性の大きな流体での実験 [31, 24] で見つかっている。

5　結論

ファラデー水面波の非線形現象について、最近の実験的及び理論的研究結果を総括した。数多くの実験に比べ、理論的には満足できるものが少ないのが現状であろう。今後、近似を高めて、実験と理論との詳細な比較を行い、また種々の理論の妥当性を検討する事が望まれる。

参考文献

[1] Alstrøm, P., Andersen, J. S., Goldburg, W. I. & Levinsen, M. T. 1995 Relative diffusion in a chaotic system: capillary waves in the Faraday experiment. *Chaos, Solitons & Fractals* **5** 1455–1464.

[2] Aranson, I. S., Ezersky, A. B., Rabinovich, M. I. & Tsimring, L. Sh. 1991 Impurity transport in parametrically excited capillary ripples. *Phys. Lett. A* **153** 211–218.

[3] Aranson, I. S., Rabinovich, M. I. & Tsimring, L. Sh. 1990 Anomalous diffusion of particles in regular fields. *Phys. Lett. A* **151** 523–528.

[4] Barashenkov, I. V., Bogdan, M. M. & Korobov, V. I. 1991 Stability diagram of the phase-locked solitons in the parametrically driven, damped nonlinear Schrödinger equation. *Europhys. Lett.* **15** 113–118.

[5] Bechhoefer, J., Ego, V., Manneville, S. & Johnson, B. 1995 An experimental study of the onset of parametrically pumped surface waves in viscous fluid. *J. Fluid Mech.* **288** 325–350.

[6] Beyer, J., & Friedrich, R. 1995 Faraday instability: Linear analysis for viscous fluids. *Phys. Rev. E* **51** 1162–1168.

[7] Bosch, E. & van de Water, W. 1993 Spatiotemporal intermittency in the Faraday experiment. *Phys. Rev. Lett.* **70** 3420–3423.

[8] Chen, X. & Wei, R. 1994 Dynamic behaviour of a non-propagating soliton under a periodically modulated oscillation. *J. Fluid Mech.* **259** 291–303.

[9] Chladni, E. F. F. 1787 Entdeckungen ü ber die Theorie des Klanges. *Breitkopf und Hä rtel, Leipzig*

[10] Christiansen, B., Alstrøm, P. & Levinsen, M. T. 1992 Ordered capillary-wave states: quasicrystals, hexagons and radial waves. *Phys. Rev. Lett.* **68** 2157–2160.

[11] Christiansen, B., Alstrøm, P. & Levinsen, M. T. 1995 Dissipation and ordering in capillary waves at high aspect ratios. *J. Fluid Mech.* **291** 323–341.

[12] Ciliberto, S. & Gollub, J. P. 1985 Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves. *J. Fluid Mech.* **158** 381–398.

[13] Decent, S. P. & Craik, A. D. D. 1995 Hysteresis in Faraday resonance. *J. Fluid Mech.* **293** 237–268.

[14] Denardo, B., Wright, W., Putterman, S. & Larraza, A. 1990 Observation of a kink soliton on the surface of a liquid. *Phys. Rev. Lett.* **64** 1518–1521.

[15] Douady, S. & Fauve, S. 1988 Pattern selection in Faraday instability. *Europhys. Lett.* **6** 221–226.

[16] Edwards, W. S. & Fauve, S. 1993 Parametrically excited quasicrystalline surface waves. *Phys. Rev. E* **47** R788–R791.

[17] Edwards, W. S. & Fauve, S. 1994 Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment. *J. Fluid Mech.* **278** 123–148.

[18] Ezerskii, A. B., Korotin, P. I. & Rabinovich, M. I. 1985 Random self-modulation of two-dimensional structures on a liquid surface during parametric excitation. *JETP Lett.* **41** 157–160.

[19] Ezerskii, A. B., Rabinovich, M. I. Reutov, V. P. & Starobinets, I. M. 1986 Spatiotemporal chaos in the parametric excitation of a capillary ripple. *Sov. Phys. JETP* **64** 1228–1236.

[20] Ezerskii, A. B., Rabinovich, M. I 1990 Nonlinear Wave competition and anisotropic spectra of spatio-temporal chaos of Faraday ripples. *Europhys. Lett.* **13** 243–249.

[21] Faraday, M. 1831 On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces., (Appendix: On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrati ng elastic surfaces.) *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **121** 299–340.

[22] Fauve, S., Kumar, K., Laroche, C., Beysens D. & Garrabos, Y. 1992 Parametric instability of a liquid-vapor interface close to the critical point. *Phys. Rev. Lett.* **68** 3160–3163.

[23] Feng, Z. C. & Sethna, P. R. 1989 Symmetry-breaking bifurcations in resonant surface waves. *J. Fluid Mech.* **199** 495–518.

[24] Fineberg, J. 1996 Physics in a jumping sandbox. *Nature* **382** 763–764.

[25] Friedel, H., Laedke, E. W. & Spatschek, K. H. 1995 Bifurcations and nonlinear dynamics of surface waves in Faraday resonance. *J. Fluid Mech.* **284** 341–358.

[26] Guthart, G. S. & Wu, T. Y. 1991 Observation of a standing kink cross wave parametrically excited. *Proc. R. Soc. Lond. A* **434** 435–440.

[27] Kambe, T. & Umeki, M. 1990 Nonlinear dynamics of two-mode interactions in parametric excitation of surface waves. *J. Fluid Mech.* **212** 373–393.

[28] Kumar, K. & Tuckerman, L. S. 1994 Parametric instability of the interface between two fluids. *J. Fluid Mech.* **279** 49–68.

[29] Laedke, E. W. & Spatschek K. H. 1991 On localized solutions in nonlinear Faraday resonance. *J. Fluid Mech.* **223** 589–601.

[30] Larraza, A. & Putterman, S. 1984 Theory of non-propagating surface-wave solitons. *J. Fluid Mech.* **148** 443–449.

[31] Lioubashevski, O. Arbell, H. & Fineberg, J. 1996 Dissipative solitary states in driven surface waves. *Phys. Rev. Lett.* **76** 3959–3962.

[32] Malomed, B. A., Nepomnyashchiĭ, A. A. & Tribelskiĭ M. I. 1989 Two-dimensional quasiperiodic structures in nonequilibrium systems. *Sov. Phys. JETP* **69** 388–396.

[33] Melo, F., Umbanhowar P. B. & Swinney H. L. 1994 Transition to parametric wave patterns in a vertically oscillated granular layer. *Phys. Rev. Lett.* **72** 172–175.

[34] Melo, F., Umbanhowar P. B. & Swinney H. L. 1995 Hexagons, kinks, and disorder in oscillaed granular layers. *Phys. Rev. Lett.* **75** 3838–3841.

[35] Mesquita, O. N., Kane, S. & Gollub, J. P. 1992 Transport by capillary waves: Fluctuating Stokes drift. *Phys. Rev. A* **45** 3700–3705.

[36] Miles, J. W. 1984 Nonlinear Faraday resonance. *J. Fluid Mech.* **146** 285–302.

[37] Miles, J. W. 1984 Parametrically excited solitary waves. *J. Fluid Mech.* **148** 451–460.

[38] Miles, J. W. 1993 On Faraday waves. *J. Fluid Mech.* **248** 671–683.

[39] Miles, J. W. 1994 Faraday waves: rolls versus squares. *J. Fluid Mech.* **269** 353–371.

[40] Miles, J. W. 1995 A note on modulated cross-waves. *J. Fluid Mech.* **295** 301–304.

[41] Miles, J. W. & Henderson, D. 1990 Parametrically forced surface waves. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22** 143–165.

[42] Milner, S. T. 1991 Square patterns and the secondary instabilities in driven capillary waves. *J. Fluid Mech.* **225** 81–100.

[43] Müller H. W. 1993 Periodic triangular patterns in the Faraday experiment. *Phys. Rev. Lett.* **71** 3287–3290.

[44] Newell, A. C. & Pomeau Y. 1993 Turbulent cristals in macroscopic systems. *J. Phys. A.: Math. Gen.* **26** L429–L434.

[45] Ramshankar, R., Berlin, D. & Gollub, J. P. 1990 Transport by capillary waves. Part I. Particle trajectories. *Phys. Fluids* **A2** 1955–1965.

[46] Ramshankar, R. & Gollub, J. P. 1991 Transport by capillary waves. Part II. Scalar dispersion and structure of the concentration field. *Phys. Fluids* **A3** 1344–1350.

[47] Rossing T. D. 1981 Chladni's law for vibrating plates. *Am. J. Phys.* **50** 271–274.

[48] Sasaki, K. 1993 Standing-Wave solitons on an interface between layered fluids in a channel. *J. Phys. Soc. Jpn.* **62** 2675–2684.

[49] Schröder, E., Andersen, J. S., Levinsen, M. T., Alstrøm P. & Goldberg, W. I. 1996 Relative particle motion in capillary waves. *Phys. Rev. Lett.* **76** 4717–4720.

[50] Simonelli, F. & Gollub, J. P. 1989 Surface wave mode interactions: effect of symmetry and degeneracy. *J. Fluid Mech.* **199** 471–494.

[51] Tokugawa, N., Umeki, M. & Kambe T. 1995 Statistical analysis of particle drifts on Faraday waves. *Flu. Dyn. Res.* **16** 43–55.

[52] Tufillaro, N. B., Ramshankar, R. & Gollub, J. P. 1989 Order-disorder transition in capillary ripples. *Phys. Rev. Lett.* **62** 422–425.

[53] Umbanhowar P. B., Melo, F. & Swinney H. L. 1996 Localized excitations in a vertically vibrated granular layer. *Nature* **382** 793–796.

[54] Umeki, M. 1991 Faraday resonance in rectangular geometry. *J. Fluid Mech.* **227** 161–192.

[55] Umeki, M. 1991 Particle transport by angular momentum on three-dimensional standing surface waves. *Phys. Rev. Lett.* **67** 2650–2653.

[56] Umeki, M. 1991 Parametric dissipative nonlinear Schrödinger equation. *J. Phys. Soc. Jpn.* **60** 146–167.

[57] Umeki, M. 1992 Lagrangian motion of fluid particles induced by three-dimensional standing surface waves. *Phys. Fluids* **A4** 1968–1978.

[58] Umeki, M. 1996 Pattern selection in Faraday surface waves. *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** 2072–2080.

[59] 梅木 誠 : ファラデー共鳴の非線形動力学とカオス、日本流体力学会誌「ながれ」**8** 156-163. (1989)

[60] 梅木 誠 : 3 次元定在水面波の粒子輸送とカオス、日本流体力学会誌「ながれ」**11** 185-190. (1992)

[61] Wu, J., Keolian, R. & Rudnick I. 1984 Observation of a nonpropagating hydrodynamic soliton. *Phys. Rev. Lett.* **52** 1421–1424.

[62] Zhang, W. & Viñals J. 1996 Square patterns and quasipatterns in weakly damped Faraday waves. *Phys. Rev. E* **53** R4283–R4286.